Ecole Louis de BROGLIE - EFREI - EISTI - ESCOM - ESEO - ESIEA
ESME Sudria - ESTIT - ISEB - ISEM - ISEN - ISEP - ITECH

CONCOURS ECRIN 1997

SERIE MP

COMPOSITION de MATHÉMATIQUES - I

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction (présentation, lisibilité, orthographe) seront des éléments importants d'appréciation des copies.

Il est notamment demandé aux candidats d'encadrer les résultats obtenus et de faire apparaître clairement les théorèmes utilisés et les points clés de leurs réponses. En particulier pour les questions dont l'énoncé fournit la réponse, le détail des calculs ou des justifications doit figurer explicitement sur la copie.

"L'usage des calculatrices est INTERDIT."

Notations On désigne respectivement par :

- J l'intervalle $]-1, +\infty[$.
- $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de J dans $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{B}$ l'ensemble des applications continues et bornées sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, à valeurs réelles.
- $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications f continues sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, et telles que la fonction $t \to \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Si f est une fonction intégrable sur un intervalle I, on note $\int_I f$ ou $\int_I f(t)\,dt$ l'intégrale de f sur I.

Objet du Problème
Dans la partie I, on définit une application linéaire $T : f \to T[f]$ sur $\mathcal{E}$.
Dans la partie II, on étudie certaines propriétés des fonctions $T[f]$, liées à la dérivation.
Dans la partie III, on étudie l'injectivité de T.
Dans la partie IV, on étudie un cas particulier et on calcule certaines intégrales.

Partie I

I.1° Prouver que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel contenant $\mathcal{B}$.

I.2° Vérifier que la fonction $\gamma : t \to \sqrt{t} \sin t$ est élément de $\mathcal{E}$ mais n'appartient pas à $\mathcal{B}$.

On retiendra donc pour la suite du problème qu'un élément $f \in \mathcal{E}$ n'est pas forcément de signe constant, ni borné sur $[0, +\infty[$.

I.3° Soit f un élément de $\mathcal{E}$. Montrer que, pour tout $x \in J$, la fonction $t \to \dfrac{f(t)}{1+t^2+x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Dans toute la suite, pour $f \in \mathcal{E}$, on note $T[f]$ la fonction à valeurs réelles définie sur J par

$$(\forall\, x \in J) \qquad T[f](x) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{f(t)}{1+t^2+x}\,\mathrm{d}t\,.$$

I.4° Montrer que $T : f \to T[f]$ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

Partie II

Dans cette partie, f désigne un élément fixé de $\mathcal{E}$.

II.1° Prouver que la fonction $T[f]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et que

$$(\forall\, x \in J) \qquad (T[f])'(x) = -\int_{\mathbb{R}_+} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^2}\,\mathrm{d}t\,. \tag{1}$$

II.2°.a) Prouver plus généralement que $T[f]$ est dérivable à tout ordre p sur J et exprimer $\big(T[f]\big)^{(p)}(x)$ à l'aide de l'intégrale suivante :

$$F_p(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^{p+1}}\,\mathrm{d}t\,.$$

II.2°.b) Qu'obtient-on pour $x = 0$?

Dans la suite on note, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$I_p = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{f(t)}{(1+t^2)^{p+1}}\,\mathrm{d}t\,.$$

II.3°.a) Vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|f(t)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,. \tag{2}$$

II.3°.b) Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $]-1,1[$, on a :

$$T[f](x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p I_p\, x^p\,. \tag{3}$$

II.3°.c) On désigne par $\mathcal{C}^\infty(J,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J, à valeurs réelles. L'application

$$\overline{T} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(J,\mathbb{R}) \\ f & \longrightarrow & T[f] \end{array}$$

est-elle surjective ?

Partie III

III.1° Soit f un élément de $\mathcal{E}$. On définit une fonction Φ sur $\mathbb{R}_+$ par

$$(\forall\, t \in \mathbb{R}_+) \qquad \Phi(t) = \int_0^t \frac{f(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

III.1°.a) Vérifier que la fonction Φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

III.1°.b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \to \dfrac{t\,\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{t\,\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{I_k}{2k} \tag{4}$$

(où I_k a été défini dans la partie **II** après la question **II.2°**.)

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $f \in \operatorname{Ker} T$, c'est-à-dire que $f \in \mathcal{E}$ et $T[f]$ est la fonction nulle sur J.

III.2° Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $I_k = 0$.

III.3° On considère la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \varphi(u) = \Phi\left(\sqrt{\dfrac{1-u}{u}}\right) & \text{si } u \in\,]0,1] \\ \varphi(0) = 0\,. \end{cases}$$

III.3°.a) Montrer que φ est continue sur $[0,1]$ et que

$$(\forall\, k \in \mathbb{N}) \qquad \int_0^1 u^k\,\varphi(u)\,\mathrm{d}u = 0\,. \tag{5}$$

Ceci montre (ce qu'on ne demande pas de justifier) que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\int_0^1 P(u)\,\varphi(u)\,\mathrm{d}u = 0\,. \tag{6}$$

III.3°.b) En déduire que

$$(\forall\, u \in [0,1]) \qquad \varphi(u) = 0\,.$$

III.4° L'application T est-elle injective ?

Partie IV

Dans cette partie, on suppose que $f(t) = \cos t$. *On remarque que* $f \in \mathcal{B}$, *donc* $f \in \mathcal{E}$. *On note* $g = T[f]$ *et pour* $a > 0$, *on pose*

$$h(a) = a\,g(a^2 - 1) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{a \cos t}{a^2 + t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

IV.1° Etablir, à l'aide d'une intégration par parties, que $(\forall\, a > 0) \quad |h(a)| \leqslant \dfrac{1}{a}$.

IV.2°.a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\cos\left(\frac{u}{n}\right)}{1 + u^2}\,\mathrm{d}u\,. \tag{7}$$

IV.2°.b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} h\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

IV.3° Démontrer, en utilisant les expressions de g' et g'' obtenues dans la partie **II**, que $h''(a)$ existe pour $a > 0$ et peut se mettre sous la forme

$$h''(a) = \int_{\mathbb{R}_+} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{a}{a^2 + t^2}\right)\right](\cos t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{8}$$

IV.4° Calculer, pour $(a,t) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{a}{a^2 + t^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{a}{a^2 + t^2}\right)\,.$$

IV.5°.a) A l'aide d'intégrations par parties, exprimer $h''(a)$ en fonction de $h(a)$.

IV.5°.b) Montrer que

$$(\forall\, a > 0) \qquad h(a) = \frac{\pi}{2}\,e^{-a} \tag{9}$$

et en déduire la valeur de $g(x) = T[f](x)$.

IV.6° Déterminer les coefficients du développement limité à l'ordre 2 de $g(x)$ au voisinage de 0.

IV.7°.a) En utilisant le résultat de la question **II.3°.b)**, calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$K_0 = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\cos t}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t \quad , \quad K_1 = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\cos t}{(1 + t^2)^2}\,\mathrm{d}t \quad , \quad K_2 = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\cos t}{(1 + t^2)^3}\,\mathrm{d}t\,.$$

IV.7°.b) Justifier l'existence de la limite

$$K' = \lim_{A \to +\infty}\left(\int_0^A \frac{t \sin t}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

et déterminer sa valeur.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail